8.1.9 Důkaz matematickou indukcí II

Předpoklady: 080108

Př. 1: Dokaž pomocí matematické indukce, že pro všechny členy posloupnosti $a_1 = 16; a_{n+1} = a_n - 3; n \in N$ platí vzorec pro *n*-tý člen $(19-3n)_{n=1}^{\infty}$.

Postupujeme podle kroků:
1. ověření pro $n = 1$
$a_n = 19 - 3n \Rightarrow a_1 = 19 - 3 \cdot 1 = 16 \quad \Rightarrow$ platí (a_1 je 16)
2. předpokládáme, že vzorec platí pro *k* a dokazujeme ho pro $k+1$
předpokládáme, že víme: $a_k = 19 - 3k$
zjišťujeme, zda platí: $a_{k+1} = 19 - 3(k+1) = 16 - 3k \Rightarrow$ použijeme rekurentní zadání a spočteme pomocí a_k člen a_{k+1}: $a_{k+1} = a_k - 3 = 19 - 3k - 3 = 16 - 3k$, dosadili jsme vzorec $a_k = 19 - 3k$ a získali jsme vztah pro $a_{k+1} \Rightarrow$ věta platí pro všechna *n*.

Př. 2: Dokaž pomocí matematické indukce, že pro všechny členy posloupnosti $a_1 = 0; a_{n+1} = 2 - a_n; n \in N$ platí vzorec pro *n*-tý člen $\left(1 + [-1]^n\right)_{n=1}^{\infty}$.

Postupujeme podle kroků:
1. Ověření pro $n = 1$:
$a_n = 1 + [-1]^n \Rightarrow a_1 = 1 + (-1)^1 = 0 \quad \Rightarrow$ platí (a_1 je 0)
2. Předpokládáme, že vzorec platí pro *k* a dokazujeme ho pro $k+1$:
Předpokládáme, že víme: $a_k = 1 + (-1)^k$.
Zjišťujeme, zda platí: $a_{k+1} = 1 + (-1)^{k+1} \Rightarrow$ použijeme rekurentní zadání a spočteme pomocí a_k člen a_{k+1}: $a_{k+1} = 2 - a_k = 2 - \left(1 + [-1]^k\right) = 2 - 1 - (-1)^k = 1 + (-1)(-1)^k = 1 + (-1)^{k+1}$.
Dosadili jsme vzorec $a_k = 1 + (-1)^k$ a získali jsme vztah pro $a_{k+1} \Rightarrow$ věta platí pro všechna *n*.

Př. 3: Dokaž pomocí matematické indukce, že pro všechna přirozená čísla platí: $2 / n^2 + n$ (2 dělí číslo $n^2 + n$).

Postupujeme podle kroků:
1. Ověření pro $n = 1$:
$n^2 + n = 1^2 + 1 = 2$ je dělitelné 2 $\Rightarrow$ platí.
2. Předpokládáme, že věta platí pro *k* a dokazujeme ji pro $k+1$:
Předpokládáme, že víme: $2 / k^2 + k$.
Zjišťujeme, zda platí: $2 / (k+1)^2 + (k+1) \Rightarrow$ upravujeme výraz tak, abychom využili $2 / k^2 + k$:
$(k+1)^2 + (k+1) = k^2 + 2k + 1 + k + 1 = k^2 + k + 2k + 2 = k^2 + k + 2(k+1)$.
Červená část výrazu je dělitelná kvůli předpokladu $2 / k^2 + k \Rightarrow$ věta platí pro všechna *n*.

Př. 4: Dokaž pomocí matematické indukce, že pro členy rekurentně zadané posloupnosti $a_1 = 1; a_{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 a_n; n \in N$ platí vzorec $a_n = \frac{1}{n^2}$.

Postupujeme podle kroků:
1. ověření pro $n = 1$
$a_1 = \frac{1}{1^2} = 1$ platí
2. předpokládáme, že vzorec platí pro a_k a dokazujeme ho pro a_{k+1}
předpokládáme, že víme: $a_k = \frac{1}{k^2}$

$a_{k+1} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^2 a_k = \frac{k^2}{(k+1)^2}\frac{1}{k^2} = \frac{1}{(k+1)^2}$ vzorec pro a_{k+1} platí

$\Rightarrow$ vzorec platí pro všechna a_n.

Př. 5: Dokaž pomocí matematické indukce, že pro členy rekurentně zadané posloupnosti $a_1 = 1; a_{n+1} = \frac{n \cdot a_n + 2}{n+1}; n \in N$ platí vzorec $a_n = 2 - \frac{1}{n}$.

Postupujeme podle kroků:
1. ověření pro $n = 1$
$a_n = 2 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{1} = 1$ platí
2. předpokládáme, že vzorec platí pro a_k a dokazujeme ho pro a_{k+1}
předpokládáme, že víme: $a_k = 2 - \frac{1}{k}$
zjišťujeme, zda platí: $a_{k+1} = 2 - \frac{1}{k+1}$ $\Rightarrow$ použijeme rekurentní zadání a spočteme pomocí a_k člen a_{k+1}:

$$a_{k+1} = \frac{k \cdot a_k + 2}{k+1} = \frac{k \cdot \left(2 - \frac{1}{k}\right) + 2}{k+1} = \frac{k \cdot \left(\frac{2k-1}{k}\right) + 2}{k+1} = \frac{2k - 1 + 2}{k+1} = \frac{2k+2}{k+1} - \frac{1}{k+1} = 2 - \frac{1}{k+1}$$

vzorec pro a_{k+1} platí
$\Rightarrow$ vzorec platí pro všechna a_n

Co znamená zápis $1 + 2 + 3 + ... + n$?

Zkusíme to nejdřív na příkladech:
$1 + 2 + 3 + ... + 7 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$
$1 + 2 + 3 + ... + 4 = 1 + 2 + 3 + 4$

Př. 6: Napiš konkrétní součet řady $1+2+3+...+n$, pokud platí:
a) $n=10$, b) $n=3$, c) $n=1$.

a) $n=10$
$1+2+3+...+n=1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$
b) $n=3$
$1+2+3+...+n=1+2+3$
c) $n=1$
$1+2+3+...+n=1$

Př. 7: Dokaž pomocí matematické indukce, že pro všechna přirozená čísla platí:
$$1+2+...+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Postupujeme podle kroků:
1. ověření pro $n=1$
součet na levé straně má jediný člen 1
dosazujeme do vzorce na pravé straně $\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1(1+1)}{2}=1$
$\Rightarrow$ pro $n=1$ rovnost platí
2. předpokládám, že rovnost platí pro k a dokazuji ji pro $k+1$
předpokládáme, že víme, že platí pro *k*: $1+2+...+(k-1)+k=\frac{k(k+1)}{2}$
chceme dokázat pro $k+1$: $1+2+...+(k-1)+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$
nahradíme prvních *k* členů součtu vlevo:
$$\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$
$$\frac{k^2+k+2(k+1)}{2}=\frac{k^2+2k+k+2}{2}$$
$$\frac{k^2+k+2k+2}{2}=\frac{k^2+2k+k+2}{2}$$ obě strany se rovnají
$\Rightarrow$ vzorec platí pro všechna *n*.

Př. 8: Je dáno *n* přímek v rovině, z nichž každé dvě jsou navzájem různoběžné a žádné tři neprocházejí týmž bodem. Tyto přímky rozdělují rovinu na $\frac{1}{2}(n^2+n+2)$ částí. Dokaž platnost tohoto tvrzení.

Postupujeme podle kroků:
1. ověření pro $n=1$
$\frac{1}{2}(n^2+n+2)=\frac{1}{2}(1^2+1+2)=2$, je to pravda, 1 přímka rozděluje rovinu na dvě části
$\Rightarrow$ pro $n=1$ rovnost platí
2. předpokládáme, že rovnost platí pro k a dokazujeme ji pro $k+1$

předpokládáme, že k přímek rozděluje rovinu na $\frac{1}{2}\left(k^2+k+2\right)$,

chceme dokázat, že $k+1$ přímek rozděluje rovinu na $\frac{1}{2}\left[\left(k+1\right)^2+\left(k+1\right)+2\right]$,upravíme vztah, který máme dokázat: $\frac{1}{2}\left[\left(k+1\right)^2+\left(k+1\right)+2\right]=\frac{1}{2}\left[k^2+2k+1+k+1+2\right]=\frac{1}{2}\left[k^2+3k+4\right]$

Teď odvodíme platnost vztahu pro $k+1$ přímek.

Máme k přímek, které rozdělují rovinu na $\frac{1}{2}\left(k^2+k+2\right)$ částí. Přímka $k+1$ protne všech k stávajících přímek $\Rightarrow$ rozdělí $k+1$ dosavadních částí roviny na dvě $\Rightarrow$ přibude $k+1$ částí $\Rightarrow$ počet částí roviny při $k+1$ přímkách:

$$\frac{1}{2}\left(k^2+k+2\right)+\left(k+1\right)=\frac{1}{2}\left(k^2+k+2+2k+2\right)=\frac{1}{2}\left(k^2+3k+4\right)$$

Dokázáno.

Př. 9: Petáková:
strana 150/cvičení 103 b) d) f)
strana 150/cvičení 109

Shrnutí: Při dokazování druhého kroku matematické indukce využíváme indukční předpoklad.